Μάθημα 22ο
Διαφ. Εξ/σεις

21/12/2018

Επίλυση β' τάξης

$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (E_0)$

$a_2, a_1, a_0 \in C(I) \quad , a_2(x) \neq 0 \; , x \in I$

Θέλω να την λύσω με δυναμοσειρά

για μια ακτίνα $r>0$ $\exists$ διάστημα (ανοιχτό) στο οποίο ορίζεται η λύση με την μορφή δυναμοσειράς
παραγωγίζονται και ολοκληρώνονται όρο προς όρο

Θεώρημα 1, σελ 236

Ας είναι x_0 ομαλό σημείο της (E_0^2).
Ας είναι $R_1, R_2 > 0$ ακτίνες σύγκλισης των a_1/a_2, a_0/a_2 αντίστοιχα και $R = \min\{R_1, R_2\}$
Αν c_0, c_1 δοσμένες πραγματικές σταθερές, τότε υπάρχουν $c_n \in \mathbb{R}$ $(n \geq 2)$ έτσι ώστε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_n - x_0)^n$ να έχει ακτίνα σύγκλισης (τουλάχιστον r) R και η συνάρτηση $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x_n - x_0)^n$, $|x - x_0| < R$ να είναι λύση της (E_0^2) που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y(x_0) = c_0$, $y'(x_0) = c_1$

για κάθε ζευγάρι τιμών βρίσκω μια λύση

παραγ. όρο προς όρο $\quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$

$y'(x) = c_1 + c_2(x - x_0) + \quad$ | $\quad y'(x_0) = c_0$
$\quad y''(x_0) = c_1$

$$\begin{array}{c} = c_0 = 1 \qquad\qquad = c_0 = 0 \\ \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{(Wronski = γρ. ανεξ. λύσεις)} \\ = c_1 = 0 \qquad\qquad = c_1 = 1 \end{array}$$

Παράδειγμα 2

$y'' - 2(x-1)y' + 2y = 0 \quad , \quad x_0 = 1$

Παρατηρώ αρχικά ότι έχω εξίσωση δευτέρης τάξης

Συντελεστές: $a_2(x) = 1 \quad x \in \mathbb{R}$

$a_1(x) = -2(x-1) \quad x \in \mathbb{R}$

$a_0(x) = 2$

Επίσης $a_2(x) \neq 0$

Πηλίκα: $\frac{a_1}{a_2}(x) = -2(x-1) \quad x \in \mathbb{R} \quad , R_1 = +\infty$

$\frac{a_0}{a_2}(x) = -2 \quad , R_2 = +\infty$

το x_0 είναι ομαλό σημείο
(Είναι αναλυτική σε όλο το $\mathbb{R}$)
$R = \min\{R_1, R_2\} = +\infty$

γύρω από το σημείο 1 την αναπτύσσω

Έχουμε $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n$

μέσω κάποιας σύμβασης το έχουμε πει

$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot n (x-1)^{n-1}$

$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-1)^{n-2}$

Θυμάμαι!

Κάνω αντικαταστάσεις

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-1)^{n-2} - 2(x-1)\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, n (x-1)^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-1)^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n \cdot n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n (x-1)^n = 0$$

φτιάχνω παντού ίδιο εκθέτη

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} (x-1)^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n (x-1)^n = 0$$

δεν έχει μηδενικό όρο

θα σπάσω τα όρια

$$2\cdot 1\cdot c_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)\,c_{n+2}(x-1)^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n\,c_n(x-1)^n + 2c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n (x-1)^n = 0$$

$$2(c_2+c_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[(n+2)(n+1)\,c_{n+2} \overbrace{- 2n\,c_n + 2c_n}^{-2(n-1)c_n}\Big](x-1)^n = 0$$

Έχω βγάλει το πεδίο ορ $= \dots$ και θέλω αυτή η παράσταση $= 0$ για κάποιο x ώστε $\lambda = 0$

$$\begin{cases} c_2 + c_0 = 0 \\ (n+2)(n+1)\,c_{n+2} - 2(n-1)\,c_n = 0, & n \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_2 = -c_0 \\ c_{n+2} = \dfrac{2(n-1)}{(n+1)(n+2)}, & n \geq 1 \end{cases}$$

μετά από πεπερασμένο αρ. σημείων θα μπορέσω να βρω $c_2, c_0 \dots$

στην ουσία έχω μια αναδρομική σχέση
(κάποιες φορές αυτοί οι τύποι μας βγάζουν κλειστούς τύπους και κάποιες άλλες ανοιχτούς)
Έχει επίλυση σε μεγάλο βαθμό η λύση μας αφού έχω βρει τους συντελεστές μας.

Εξετάζω δυο περιπτώσεις (Άρτιοι, Περιττοί)

- $n = 2k$

$2k \geq 1 \Rightarrow k \geq 1/2$, $k \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{c_{2k+2}}_{2(k+1)} = \frac{2(2k-1)}{(2k+1)(2k+2)}\,c_{2k}, \quad k \geq 1$$

πετυχα να πάω από έναν όρο στον αμέσως επόμενο

$k=1$: $\quad c_4 = \dfrac{2\cdot 1}{3\cdot 4}\,c_2 = \dfrac{c_2}{6}$

$k=2$: $\quad c_6 = \dfrac{2\cdot 3}{5\cdot 6}\,c_4 = \dfrac{c_4}{5}$

$k=3$: $\quad c_8 = \dfrac{2\cdot 5}{7\cdot 8}\cdot c_6 = \dfrac{5}{28}\,c_6$

$\dots\dots ?$

Scanned by CamScanner

$k=n-1: \quad C_{2n} = -\dfrac{2(2n-3)}{2n(2n-1)} C_{2(n-1)}$

Άρα έχω:

$$C_{2n} = -\frac{2^{n-1}\, 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{[3\cdot 5\cdot 7\cdot \underset{(2n-3)}{\ldots} \cdot (2n-1)]\cdot[4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot 2n]}\cdot C_0 \,, \quad n \geq 2$$

Προσοχη στα πεδια ορισμου και στα κ με τους περιορισμους !!!

$$C_{2n} = -\frac{2^{n-1}}{(2n-1)(4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot 2n)}\cdot C_0 \,, \quad n \geq 2$$

$$C_{2n} = -\frac{2^{n}}{(2n-1)(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot 2n)}\cdot C_0 \,, \quad n \geq 2$$

$$C_{2n} = -\frac{1}{(2n-1)n!}\cdot C_0 \,, \quad n \geq 2$$

- $n = 2k+1$

$2k+1 \geq 1 \Rightarrow k \geq 0$

$$C_{2k+3} = \frac{2(2k+1-1)}{(2k+2)(2k+3)} C_{2k+1} \,, \quad k \geq 0$$

$k=0: \quad C_3 = \dfrac{2\cdot 0}{\ldots} = 0$

$k=1: \quad C_5 = \dfrac{0}{0}\cdot \cancel{C_3}^{\,0} = 0$

$\vdots$

$C_{2n+1} = 0 \,, \quad n \geq 1$

Scanned by CamScanner

Συνοψίζω

$$\begin{cases} c_{2n} = -\dfrac{1}{(2n-1)\,n!}\, c_0 , & n \geq 2 \\ c_{2n+1} = 0 , & n \geq 1 \end{cases}$$

προσοχή στη δυναμοσειρά μετά επειδή αρχίζει από 2

Δυναμοσειρά $y(x) = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + \sum_{n=2}^{\infty} c_{2n}(x-1)^{2n}$

$$y(x) = c_0 + c_1(x-1) - c_0(x-1)^2 - c_0 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)n!}(x-1)^{2n}$$

$$y(x) = c_0 \underbrace{\left[1 - (x-1)^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)n!}(x-1)^{2n} \right]}_{\text{1. γραμ. ανεξ. λύση}} + c_1 \underbrace{(x-1)}_{\text{2 γραμ. ανεξ. λύση}}$$

$$\begin{cases} y_1(x) = 1 - (x-1)^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)n!}(x-1)^{2n} \\ y_2(x) = x-1 \end{cases}$$

ΒΣΛ (Δυο γραμμ. ανεξ. λύσεις)

Παράδειγμα 3

$(1-x)y'' - y' + xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

Εξετάζω αν το σημείο που είναι ομαλό

Το σημείο που εδώ $x_0 = 0$ είναι ομαλό

Συντελεστές $a_2(x) = 1-x$

$a_1(x) = -1$

$a_0(x) = x$

Επειδή $a_2(0) \neq 0$

Πηλίκα $\dfrac{a_1}{a_2}(x) = -\dfrac{1}{1-x}$

$R_1 = 1, \quad 1-x \neq 0, \quad |x-0| < 1$

$\frac{a_0}{a_2}(x) = \frac{x}{1-x}$, $R_2 = 1$

$R = \min\{R_1, R_2\} = 1$

(πράξεις στο βιβλίο...)

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ...

$\begin{cases} 2c_2 - c_1 = 0 \\ (n+2)(n+1)c_{n+2} = (n+1)^2 c_{n+1} - c_{n-1} \quad ② \end{cases}$ $n \geq 1$

έχω βήμα=3

από τις συνθήκες ξέρω ότι $c_0 = 1$, $c_1 = 1$

για $c_1 = 1$ έχω $c_2 = 1/2$

από τη ② σχέση έχω $2 \cdot 3 \cdot c_3 = 4 \cdot c_2 - c_0 \Rightarrow .. \Rightarrow c_3 = 1/2 \cdot 3$

για $n = 2$

$4 \cdot 3 \cdot c_4 = 9c_3 - 1 \Rightarrow .. \Rightarrow c_4 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}$

παρατηρώ ότι $c_n = \frac{1}{n!}$ θα πρέπει να το δείξω επαγωγικά.

Συνεπώς $c_n = \frac{1}{n!}$, $n \geq 1$ και λύση

$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

ξεκινάω με ακτίνα τουλάχιστον 1 και τελικά να ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$

⊗ Εφαρμογη (παραδειγμα 5)

$$x^2(x^2-1)y'' + x(2x^2-1)y' + y = 0 \quad , \quad x \to \infty$$

→ για τιμες 0, ±1 δε μπορω το σημειο μου δε θα ειναι ομαλο

→ θελω μη φραγμενη ακτινα

Μπορω να βαλω $w = \frac{1}{x}$ ετσι ωστε οταν το x πολυ μεγαλο το w να μου δινει καποιον πραγματικο αριθμο το 0

Αρα $w = \frac{1}{x}$, $x \neq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{w}$

Μετατρεπω και τις παραγωγους

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dw} = -w^2\frac{dy}{dw}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dw}\left(-w^2\frac{dy}{dw}\right)\frac{dw}{dx} =$$

$$= \left(-2w\frac{dy}{dw} - w^2\frac{d^2y}{dw^2}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2w^3\frac{dy}{dw} + w^4\frac{d^2y}{dw^2}$$

οποτε εχω τωρα μετα τις πραξεις ...

$$(1-w^2)\frac{d^2y}{dw^2} - w\frac{dy}{dw} + y = 0 \quad , \quad w_0 = 0$$

→ $y(w)$, $|w| < 1$

μπορω να μελετησω για πολυ μεγαλες τιμες αρκει να κανω αλλαγη μεταβλητης

οταν βρω την $y(x)$ δε πρεπει να ξεχασω και την ακτινα συγκλισης

$y(x) = \ldots$ $0 < \frac{1}{x} < 1$ δηλ. $x > 1$ αρα $y(x) = \ldots$ με $x \in (1, +\infty)$

Scanned by CamScanner